le royaume du mathématicien

David Levrat

Abstraction

Chiffre

« 7 » est parfaitement incompris, tandis que « 8 » l'est comme il faut, pas tout à fait complètement. « 7 » est élégant, « 8 » est plus sympathique. Le « 6 » est un « 8 » retourné, inachevé. « 7 » c'est le miel, « 8 » c'est le pain et « 6 » c'est le beurre. Ainsi, « 9 » serait l'huile d'olive.

« 5 » reprend à « 7 » son style, mais en plus accueillant. « 4 » est symétrique à « 7 », de manière centrale et un peu contrariée. Il n'est toujours pas sympathique, il a toujours raison. D'ailleurs, il a presque tout mais il se cherche encore. « 3 » est rouge, « 4 » est jaune comme le foie et « 5 » est bleu du fond de l'océan.

« 2 » console « 1 » qui n'en a pas besoin. Alors il se console lui-même ; il se suffit presque, c'est ce qu'il lègue au « 4 ». « 2 » est un pied sur un autre ; ce sont tout de même deux pieds. « 1 » est un rocher. Et « 0 »… Zéro c'est du lait noir, celui qu'on boit la nuit.

Les mathématiques sont réputées être strictement objectives. Je vais pourtant m'attacher à y dénicher une forme de subjectivité. Les paragraphes qui précèdent proposent quelques échos de goûts, de couleurs, de significations que les chiffres ont pour moi. Cette synesthésie est certes contingente à l'arithmétique, mais de même que la physique quantique fait objectivement intervenir l'observateur, le physicien, les mathématiques poussées vers leurs extrêmes semblent faire intervenir le mathématicien. Ce dernier brise la symétrie de l'égalité et lui donne un sens ; il oriente les suites tautologiques de symboles et leur confère une temporalité ; contre la généralisation systématique, son interprétation ponctuelle – presque invisible, partielle et partiale – densifie infiniment le message… jusqu'à le créer en partie ?

Les chiffres forment les nombres et les premiers nombres se confondent avec les chiffres. Après les chiffres, il y a les nombres qui donnent un sens aux réalisations humaines : 10 chapitres, 100 000 mots. Viennent ensuite les grands nombres et finalement les infinis. Les grands nombres commencent vers 10^{80}, le nombre approximatif d'atomes dans l'univers connu. Presque juste après, on trouve googolplex

$$10^{10^{100}}$$

À partir de ce nombre, le sens s'effiloche. Les très grands nombres dépassent le nombre des combinaisons possibles des éléments atomiques de l'univers. Et même toutes celles décrivant les histoires possibles de notre univers – toutes celles qui ont une fin. Par exemple, l'histoire dans laquelle je taperais chaque lettre de cet article avant d'avoir une tête d'éléphant puis un corps gros comme le monde. Ou bien l'histoire dans laquelle je n'existerais pas, ni personne d'autre, seulement des sculptures étranges non soumises aux forces fondamentales. Ainsi que les deux qui s'enchaîneraient dans un sens comme dans l'autre. Bref, bien davantage que le décompte de tous les enchaînements possibles de configurations neuroniques de l'ensemble des cerveaux humains.

Après les très grands nombres, il y a les «petits infinis». Le plus petit d'entre eux, c'est celui des entiers naturels N. N est l'ensemble des nombres entiers positifs qu'on peut imaginer et de ceux qu'on ne peut pas, mais qu'on peut construire (par exemple en ajoutant 1 au plus grand nombre qu'il nous est donné d'écrire). Après N, il y a R. R représente l'ensemble des nombres réels. Une différence de taille entre N et R, c'est que chacun des nombres de R est libre d'être infini aussi bien derrière que devant sa virgule. Entre deux, il y a aussi toutes les fractions d'entiers naturels que l'on peut écrire sous la forme condensée «p/q» et qui sont en fait aussi nombreuses que les entiers naturels dans N: aussi infinies. On note cet ensemble Q. De manière formelle, on compare les infinités par bijection: si chaque élément d'un ensemble infini peut être associé à chaque élément d'un autre ensemble infini, alors ils ont la même «finitude» et on dit que les deux ensembles ont la même taille. Mais R est vraiment bien davantage. C'est ce qu'on appelle la puissance du continu, la taille de l'ensemble, et que les mathématiciens notent parfois par la lettre hébraïque aleph avec un indice $\aleph_1$ ou encore $2^{\aleph_0}$, le symbole $\aleph_0$ indiquant le cardinal du dénombrable N.

La puissance du continu, c'est le nombre de points sur un cercle par exemple. C'est d'ailleurs autant que les points à l'intérieur du cercle, et même à l'extérieur de celui-ci et de son plan, dans un univers à 3, 4, ou à cent mille dimensions. Entre N et R, la frontière est curieuse: il est démontré mathématiquement qu'il n'est pas possible de démontrer mathématiquement l'existence d'un cardinal intermédiaire. L'hypothèse indécidable $\aleph_1 = \mathsf{R}$ (qui indique que R se situe bien à la suite de $\aleph_0$) qualifiée d'hypothèse du continu est ainsi jugée mathématiquement indécidable.

À partir de ces infinités, le cardinal N du dénombrable, le fait de pouvoir compter des éléments, l'ordinal R du continu, le fait de pouvoir ordonner des grandeurs et tous les ordinaux suivants infiniment plus grands, commence la réalité existentielle, sentimentale, ressentie. On peut considérer que les possibilités d'agencement de la réalité matérielle des choses sont à peu près infinies. Mais davantage encore la réalité est vécue : elle est interprétée par l'histoire du vivant. Chacune de mes situations vécues, sur laquelle j'ai porté une interprétation sentimentale, fait écho à l'ensemble de mes situations vécues, jusqu'à la situation présente, incluant les situations passées et futures que j'envisage. Considérant la réalité matérielle selon une comptabilité cardinale, la comptabilité du sentiment serait une comptabilité ordinale. En fait de sentiments, ce qui peut être évalué n'a pas de valeur ; mais ce qui ne peut être évalué peut sans doute être ordonné, et c'est d'ailleurs ce que nous faisons en retenant certains choix plutôt que d'autres. Même dans l'infinité, nous parvenons à opérer.

Je peux par exemple dénombrer tous les arrangements ou agencements atomiques possibles et les numéroter de la manière suivante : 1, 2, 3, [...], dix milliards de milliards, et ainsi de suite. Après avoir dénombré des milliards de milliards d'arrangements atomiques, on peut imaginer qu'ils se valent tous à peu près. Aussi, je note ω le dernier de ces grands nombres, que je ne connais pas du reste. Ainsi, la réalité atomique pourrait être notée $1, 2, 3, \ldots, \omega$. Et la réalité vécue qui résulte de ces arrangements atomiques pourrait être notée $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$. On peut même imaginer que le nombre des réalités vécues atteint le nombre des arrangements atomiques, voire le dépasse, soit $\omega+\omega$, $2\omega+1$, $2\omega+2$, 3ω, etc. Si on continue à dénombrer ces réalités on arrive à oméga au carré ω^2, éventuellement oméga à la puissance oméga ω^ω. Ce qui est intéressant de noter, c'est que dans ce décompte, $1+\omega \neq \omega+1$. En effet, en ajoutant des arrangements atomiques à tous les possibles vécus, on reste à égalité avec les possibles vécus. Ajouter un brin d'herbe à ma prairie ou un million de grain de sable à une plage ne change pas ma réalité vécue de la prairie ou de la plage. Ainsi, $1+\omega=\omega$; $1\,000\,000+\omega=\omega$. En revanche, $\omega<\omega+1$. En effet, quand j'ajoute un certain nombre à gauche de ω, j'ajoute ce certain nombre à des milliards de milliards. Je n'ajoute donc pour ainsi dire rien. Quand j'ajoute 1 à droite de ω, cela veut dire que j'interprète ces milliards de milliards, un petit peu plus, selon l'attention que je porte sur le monde. Je peux lui ajouter 2, 3, ... ou bien davantage. Le fait que l'addition soit commutative est une coïncidence de la réalité matérielle. Une coïncidence valable pour toute grandeur arithmétique, qu'il s'agisse de nombres, de vecteurs, de matrices, etc., mais qui n'est pas valable dans le vécu des choses.

Opération

Une opération est une relation, un lien entre des nombres. Il est en effet possible de les additionner, de les retrancher, de les multiplier ou de les diviser. L'addition est bien connue. La multiplication est un certain nombre d'additions, une addition d'additions ; de même, la puissance est une multiplication de multiplications. Et toute relation peut être inversée, l'addition en soustraction, la multiplication en division et la puissance en racine.

En appliquant ces liens inversés simplement sur les entiers naturels, je vois de nouveaux nombres. Des nombres négatifs d'abord, qui complètent les entiers naturels pour former ce qu'on appelle les entiers relatifs, dont l'ensemble est noté $\mathbb{Z}$. Ensuite, avec la division naissent les nombres dits rationnels, définis par le rapport de deux entiers et dont l'ensemble se note $\mathbb{Q}$.

En appliquant l'opération racine, j'obtiens encore de nouveaux nombres, une partie des nombres dits réels, dont l'ensemble se note $\mathbb{R}$. Mieux encore, en appliquant « frauduleusement » la racine à des nombres négatifs, j'obtiens des nombres dits complexes, dont l'ensemble se note $\mathbb{C}$. Le nombre complexe résulte par exemple de la résolution de l'équation quadratique élémentaire $x^2 + 1 = 0$. Cette équation ne possède pas de solution dans l'ensemble des nombres réels : il n'existe aucun nombre dont le carré est négatif. Le nombre dont le carré vaut -1 se note i ; c'est la base des nombres dits imaginaires qui composent, avec les nombres réels, les nombres dits complexes (par exemple $3 + 2i$).

Avec seulement quelques chiffres et l'addition, on peut reconstruire de proche en proche tous les nombres et les opérations les plus importantes. Ces opérateurs manipulaient tranquillement des nombres entiers et se retrouvent avec des nombres imaginaires. Et un paquet. Est-ce là une situation prévue ? Les opérateurs semblaient être de belles lois bien mécaniques qui transformaient des nombres en nombres et les voilà avec des révélations sur des nombres qui ne semblent exister que dans nos têtes et dont la réalité est encore aujourd'hui débattue entre mathématiciens. Une simple opération comme l'addition et son image miroir, la soustraction, peuvent révéler, parfois, une nouvelle liberté, encore plus vaste que la précédente.

Comment cette révélation a-t-elle été possible ? Apparemment, dans l'inversion des relations. Dans le *miroir* mathématique. Quel est cet être qui, quand on lui ajoute 2, donne 1 de l'autre côté du miroir ? Quelle est cette chose qui, quand on la multiplie par 2, « voit » 3 ? Quelle est cette sombre inconnue qui, multipliée par elle-même, se retrouve négative ? Et surtout, quel est ce miroir ? Ce miroir, c'est l'égalité mathématique, l'identité, l'équilibre des nombres.

Égalité

En général, l'égalité mathématique est vue comme un équilibre parfait, une rigoureuse identité entre un terme à gauche et un terme à droite. Présenter une égalité semble admettre qu'il n'y ait rien à dire : ceci est égal à cela, cela est égal à ceci ; ceci ou cela, finalement ça m'est égal, je ne dis rien. Rien que des tautologies plus ou moins longues : « tout est tout », « rien n'est rien », « tout moins rien plus le reste resterait égal à tout ». Les mathématiques observeraient, ainsi qu'une araignée aux aguets, uniquement ce qui est projeté sur sa toile plate, la toile du résultat, peu importe le chemin parcouru dans l'espace qui a mené le moustique à la toile. L'homme serait figé dans cet univers glacé.

En vérité, l'égalité mathématique n'est pas une identité rigoureuse, l'égalité est une égalité de résultat, non de calcul. De là naît un léger déséquilibre entre les deux membres de l'égalité, et de ce petit déséquilibre naît un sens : l'inégalité du calcul, la différence substantielle entre ce qui est écrit à gauche et à droite. Si elle est parfaitement équilibrée, elle ne dit rien, elle annonce « $4 = 4$ » par exemple. C'est une tautologie inutile, une égalité typographique, tout comme « $1 + 2 = 1 + 2$ ». En revanche « $1 + 2 = 2 + 1$ » laisse apparaître une forme de symétrie, propre à l'opération addition. L'égalité qui nous intéresse, c'est l'égalité la plus inégale, la plus déséquilibrée, la plus asymétrique. De fait, l'égalité « $e^{i\pi} + 1 = 0$ » est indéniablement plus intéressante.

Ainsi, le niveau de déséquilibre serait une mesure de la valeur que nous donnons à une égalité, à toute chose saisie. Bien sûr, celle que nous recherchons ici, c'est celle qui serait la plus subtile, celle qui n'a aucune symétrie évidente, qui demande un effort incertain et qui au bout du compte pourra éventuellement densifier le naturel arithmétique en réalité. Celle dont le résultat coïnciderait avec un nombre gigantesque de chemins de calculs différents. Celle que nous recherchons, c'est l'égalité dont la symétrie serait la plus brisée, réalisée sur des opérations et des nombres, sur des égalités que l'on pourrait ordonner selon l'ordre de grandeur du temps qu'il a fallu pour y parvenir : l'ordre de grandeur du nombre de calculs intermédiaires nécessaires pour vérifier l'égalité et du temps qu'il faut pour la résoudre. Comme si l'égalité pouvait avoir une temporalité, une non-commutativité intrinsèque, comme le passage d'une définition à un axiome, à une propriété, à un théorème. Une étrange association entre une égalité et une inégalité. Le calcul est une chaleur, le résultat un travail, entre les deux il y a une perte de temps. Finalement cette perte est la valeur des choses, un investissement pour le futur, comme une décomposition en facteurs premiers. Mais au final, peut-être que l'égalité qui nous intéresse, c'est l'inégalité typographiquement stricte. Quand $1 + \omega = \omega$, faut-il enfin envisager d'indexer l'égalité elle-même, selon les nombres et les opérateurs qui l'entourent, avec d'autres nombres et d'autres opérateurs, des petits « $o(=)$ » et des grands « $O(=)$ » pour mesurer le degré de difficulté qu'il a fallu surmonter afin d'établir cette relation ?

Parenthèse

Simplifions un peu. Considérons un moustique constitué de trois gènes notés 1, 2 et 3. Ces trois gènes s'expriment différemment selon les moustiques, et disposent entre eux de relations distinctes : « $+$ » et « $\times$ ».

Considérons le moustique « $1 + 2 \times 3$ ». Et laissons-le voler jusqu'à la toile d'araignée :

Trajet de face : $1 + 2 \times 3 = (1 + 2) \times 3 = 3 \times 3 = 9$

Trajet de côté : $1 + 2 \times 3 = 1 + (2 \times 3) = 1 + 6 = 7$

Ainsi, le chemin est une destination. Suivant la priorité que j'accorde à l'addition sur la multiplication, ou la multiplication sur l'addition, l'identité du moustique n'est pas conservée : plusieurs calculs sont possibles. De la diversité des opérateurs naît la nécessité de préciser l'ordre de calculs entre eux. Quel est le bon ordre ? Y a-t-il un bon ordre ? Existe-t-il un critère mathématique pour trancher ? Il existe en tout cas un objet pour rééquilibrer l'égalité mathématique, pour lui permettre d'équilibrer ses deux côtés avec rigueur. Une nouvelle loi. Celle de la temporalité justement.

Les parenthèses sont nécessaires pour préciser le chemin de calcul, éviter les écueils éventuels des différentes lectures possibles et garantir la stabilité de l'égalité. Les parenthèses définissent une loi de priorité entre deux opérations. C'est la main du mathématicien qui s'exprime. Le mathématicien peut d'ailleurs les rendre transparentes en définissant directement une priorité pour un certain nombre de cas simples, afin de réduire le nombre de signes typographiques à utiliser. C'est un choix basé sur l'économie du temps d'écriture et de lecture, de la feuille et de l'encre ainsi que celui de sa propre pensée. Bref, c'est un critère acceptable sous son air de règle totalitaire.

Ces règles pour limiter l'usage des parenthèses sont utiles la plupart du temps. Elles résolvent directement les questions inintéressantes, les parenthèses permettant d'identifier rapidement les questions mathématiques qui méritent en principe notre attention. Les règles de priorité retenues permettent d'éviter les questions parfaitement sensées et quasiment insignifiantes. Ces règles laissent le mathématicien libre d'aller à la limite du sensé, à la frontière du connu. Pour s'y regarder. En fait, il peut se regarder lui-même dans les parenthèses invisibles qu'il a placées ; il ne peut presque rien faire d'autre, du reste, même si cela change tout.

Application

Succession

Rétrospectivement, à partir de l'addition, on définit la succession comme simple itération : « +1 ». Mais la succession, c'est tout autre chose. La succession, c'est la possibilité d'autre chose. Quelque chose de différent. Peu importe quoi, mais autre chose. Un symbole, une idée, un caillou, etc. Une chose à laquelle vous n'avez pas encore pensé précédemment. La succession, c'est l'historique de ces différences ; le successeur, c'est simplement et justement quelque chose de différent de tout ce qui a été fait jusqu'à présent : 1, 2, 3 et 4 n'ont rien de particulier, ils sont simplement différents. On pourrait avoir 1, maman, adjectif, courir, trois petits points.

La succession arithmétique peut également être appréhendée par son reflet dans la théorie des ensembles : l'inclusion. Dans son essence, l'ensemble suivant, le prochain, le nouvel ensemble, est celui qui inclut le précédent sans être le même. Une fois que tous les ensembles existeront, nous pourrons rétrospectivement trouver des ensembles distincts qui ne s'incluent pas, et déplier l'histoire qui les a formés. L'aspect chronophage du temps est plus net dans le reflet de la théorie des ensembles, tandis que l'aspect irrémédiable l'est dans l'arithmétique, même si chacune de ces disciplines dispose de ces deux aspects. L'ensemble de départ est vide comme un film qui n'a pas encore débuté et l'inclusion, comme la succession, sont finalement essentiellement des producteurs de nouveauté de leur propre monde.

Le lien avec le hasard est assez fort : dans son essence, le hasard est ce qui produit l'oubli, tandis que la succession est ce qui produit un souvenir. Mais en réalité, une fois les nombres créés, la relation est presque inverse : le hasard devient fertile, générateur de la nouveauté, de l'imprévisible, tandis que la succession devient stérile, car prévisible. Le hasard pourrait alors être vu comme le fils de la succession, le successeur de la succession. Une fois le monde créé, l'oubli succède à la mémoire. Le monde est un chaos, fertile et destructeur.

Le lien avec l'égalité est peut-être encore plus fort. La succession est la fixation de l'inégalité, la conservation, le souvenir de la différence. C'est la nouvelle identité, le lien entre le chiffre et le reste. Bref, la succession est essentiellement une production de différence, une accumulation de distinctions, la mémoire du temps auquel elle donne naissance.

Addition

Pour comprendre la fertilité de l'arithmétique, il faut voir comment les nombres et les opérations se révèlent entre eux. Comme le grain donne un sens à la meule, le chiffre précise l'usage de l'addition : d'un certain point de vue, le chiffre utilise l'addition, la manipule et s'en sert comme d'un objet répondant à ses moindres volontés : le chiffre lui dit comment elle doit se comporter, combien de successions elle devra opérer. En effet, les chiffres révèlent à l'addition leur fonction en tant qu'opérateur, l'actualisent comme l'onde révèle le corpuscule : $1 + 2$ est « 1 incrémenté 2 fois », c'est-à-dire « 1 incrémenté incrémenté », de même que $2 + 1$ est « 2 incrémenté ». Le chiffre de gauche serait ici le point de départ et le chiffre de droite la révélation de l'opérateur, le nombre de fois que j'applique son concept. Le second chiffre peut ainsi s'interpréter comme la révélation de l'addition, dans ce cas, le nombre de successions, éclairant ici le 1 vu depuis le 2, ou réciproquement via une relation entre eux.

On remarque en passant que la langue française se lit de gauche à droite, j'ai traduit « $1+2$ » en lisant de gauche à droite : « 1 incrémenté deux fois ». Si j'étais d'origine algérienne par exemple, je lirais peut-être les chiffres arabes de droite à gauche et interpréterais « $1+2$ » « 2 incrémenté ». Le tout fait trois, on parle bien de la même chose même si nous sommes différents. En fait, il y a identité dans le résultat, mais non-identité dans le sens de lecture. De la non-identité de lecture surgit en quelque sorte une non-identité de calcul. En effet « $1+2$ » se calculerait « 2 … 3 » chez les Français, tandis que les Algériens, ou plutôt les Franco-Algériens, effectueraient « 1 … 2 … 3 » en inversant sens de l'écriture et celui de la lecture.

Certes, la différence est ténue et l'addition reste ici encore assez froide avec les nombres qu'elle manipule. Elle semble toujours les réduire à des signes typographiques. Mais il y a tout de même un espoir.

Multiplication

De la succession à l'addition, il n'y a qu'un principe d'itération : l'addition est une succession de successions, une incrémentation d'incrémentations. C'est proche de la génétique : réplication de la succession des paires de base dans le cas de la molécule d'acide désoxyribonucléique (ADN), des acides aminés (AA) dans le cas des protéines. Et réplication de la réplication, jusqu'à la reproduction et à l'évolution. Voyons l'évolution.

La multiplication est effectivement une simple addition d'additions. Mais on peut aussi répliquer notre raisonnement sur l'addition. Par exemple, en recombinant comme le ferait la génétique les sens de lecture et d'écriture, « 3×4 » peut être lu de diverses manières. Soit « S » pour symboliser l'opération succession :

$$3 \times 4 = 3+3+3+3 = SSS(SSS(SSS(SSS)))0$$

$$3 \times 4 = 4+4+4 = ((SSSS)SSSS)SSSS\,0$$

$$3 \times 4 = SSSS((SSSS))SSSS)0$$

Je m'aperçois, ici, qu'en poussant plus loin cette logique, on pourrait aller jusqu'à indexer les parenthèses, ce qui permettrait d'indiquer certains cheminements non linéaires de calculs difficiles à mettre en place avec de simples parenthèses. Par exemple :

$$(SSS)_2(SSS)_4(SSS)_1(SSS)_3 0$$

Bref, on peut se réjouir de la multiplication des chemins ou désespérer de l'identité de la destination commune : 12.

Puissance

La puissance est la multiplication appliquée à elle-même, une multiplication de multiplications : une démultiplication. Considérons 2^3. En lecture conventionnelle, on obtient « deux démultiplié trois fois » :

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

Pour la même opération, mais cette fois en lecture non conventionnelle, on obtient « trois démultiplié deux fois » :

$$2^3 = 3 \times 3 = 9$$

Ici, il y a une révélation. Il semble qu'on retrouve dans son essence la non-commutativité de « S » et, en réalité, sous la forme d'une non-commutativité de l'exponentiation. Ainsi, après avoir répété l'opération succession pour obtenir l'addition, puis répété l'addition pour faire apparaître la multiplication, on tombe sur le premier exemple d'un opérateur qui cesse d'être commutatif. Ainsi, curieusement, la répétition d'un concept peut finalement briser une symétrie.

Le résultat est donc différent cette fois-ci ; une écriture et une lecture inversées fournissent un résultat non conventionnel qui vaut davantage que le résultat conventionnel. L'histoire de mon chemin peut donc avoir une signification, un impact sur le résultat. Désormais une identité est possible. Celle du mathématicien, de sa nature qui n'a plus seulement le pouvoir de la parenthèse, mais le devoir de se prononcer, de trancher sur une éventuelle convention. Et pour trancher justement, il faut comprendre. Et pour comprendre, il faut se répéter : poursuivons, itérons encore. Que cela signifie-t-il ? Et à quoi bon continuer, se troubler davantage ? Pourquoi y aurait-il une différence, une brisure avec le reste, je ne fais que me répéter, je ne dis rien de plus qu'avant ; ne savais-je pas ce que je disais avant ? Et surtout, quel serait cet opérateur qui saisirait la puissance comme elle manipule la multiplication ? Qu'y a-t-il après la puissance ?

Raisonnement

Suite

L'opération suivante, je l'ai nommée surpuissance. Les mathématiciens la nomment tétration. La surpuissance, ou tétration, c'est le nombre de puissances successives. Je le note ici avec une esperluette « & », par exemple 3 & 4. En français, cela donne « 3 » démultiplié quatre fois, soit

$$3 \,\&\, 4 = 3^{3^{3^{3}}} = \left(\left(3^3\right)^3\right)^3 = 7\,625\,600\,000\,000$$

C'est presque une myriade de milliards. Et en algérien, par exemple, la même opération écrite en français et lue en arabe :

$$3 \,\&\, 4 = 3^{\left(3^{\left(3^{3}\right)}\right)} = 3^{7\,625\,600\,000\,000} = \text{énormément plus}$$

Ce dernier correspond à 3 multiplié par lui-même plus de 7 600 milliards de fois. Le premier cas correspond à un nombre tout à fait raisonnable, ce n'est pas un grand nombre, il peut trouver une signification dans notre réalité. Le second est un vrai grand nombre. Même si j'étais le créateur de l'univers connu, je ne serais pas capable d'en écrire ses décimales, car je n'aurais pas assez d'atomes pour le faire, à supposer aussi que j'en aie le temps et la place. C'est par ailleurs étonnant que le second résultat soit comme « un cran au-dessus » du premier : on itère la puissance de trois une fois de plus dans le second cas, vis-à-vis du premier.

C'est troublant : suivant mon observation, ma lecture, mon identité culturelle, le choix du sens de lecture et d'écriture, le résultat est tellement changé qu'il a aussi changé de nature. Le placement des parenthèses, le sens de lecture et d'écriture à chaque étape sont de mon ressort et me laissent une liberté telle que je peux affirmer mes choix dans cet univers insondable de possibles. Et puis cette étonnante étape supplémentaire de la lecture inversée : on obtient plus de 7 600 milliards dès la deuxième étape de calcul, sans avoir attaqué la troisième, alors que la lecture conventionnelle est déjà achevée. La lecture inversée a la propriété de croître bien plus rapidement que son homologue français. La symétrie gauche-droite ne touche pas seulement les identités culturelles comme le sens de lecture. Elle touche aussi la nature fondamentale de la matière en créant des objets ambidextres.

On ne révèle rien du tout de la surpuissance en agissant, en étant cette sorte de mathématicien de souche pure ; on n'atteint pas le niveau interprétatif de la puissance, celui qui la comprend. Je peux illustrer cette relative pauvreté de l'écriture conventionnelle ainsi : $3 \,\&\, 4 = 4^{(4\times4)}$ ou bien encore $4 \,\&\, 5 = 5^{(5\times5\times5)}$. Je réduis la surpuissance à une bête multiplication de puissance, et ignore la puissance derrière la puissance. En étant un peu plus formel, si je note deux entiers *a* et *b*, alors :

$$a \,\&\, b = a^{\left(a^{(b-1)}\right)}$$

C'est un peu compliqué comme écriture, mais ça l'est aussi à la lecture et à la compréhension : on a réduit la surpuissance à une forme fixe de puissance, à une forme prédéterminée qui ne tient plus compte en elle-même de la spécificité de chaque individu : alors qu'à ce niveau d'évolution, il y aurait la possibilité de rendre compte de chaque être, de chaque chiffre, ce choix de surpuissance les réduit à nouveau à de simples objets et ne révèle plus rien d'eux, et ne révèle par ricochet rien de la surpuissance. L'opérateur redevient indépendant des chiffres. Le mathématicien qui fait recours à la lecture non conventionnelle, lui, ne peut pas se résumer sans des petits points qui laissent autant de place libre aux chiffres :

$$a \,\&\, b = \underbrace{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}_{b \text{ fois}}$$

Finalement, une fois saisie par le dessus, la règle à retenir semble être celle du métissage d'opérateurs et de chiffres de souche pure. Plutôt qu'un gâchis de signes typographiques qui se satisfait lui-même, mieux vaut choisir une règle qui élève, qui rend plus libre en révélant les objets qui se proposent à elle. La révélation se fait dans l'interdépendance de l'opération et du chiffre. Le choix est alors économique, il minimise le nombre de symboles pour un maximum de symbolique. Le choix devient éthique, une loi significative est possible. À noter qu'il existe un grand nombre de lectures non conventionnelles. Celle qui est retenue est bien la plus simple et la plus belle, mais il serait possible d'indexer aussi toutes les interprétations intermédiaires.

Poursuite

Pour tout entier naturel a et b, on définit à partir de la succession les opérations suivantes :

$a + b = SSS \dots Sa$ (*b* fois)

$a \times b = a + a + a + \dots + a$ (*b* fois)

$a^b = a \times a \times a \times \dots \times a$ (*b* fois)

$a \,\&\, b = a^{a^{a^{\dots^{a}}}}$ (*b* fois)

Évidemment, il est possible de poursuivre. Nous pourrions définir une *sur*-surpuissance à partir de la surpuissance, par exemple, en la notant # :

$a \# b = a \,\&\, a \,\&\, a \dots \&\, a$ (*b* fois)

De cette manière on peut ici généraliser la notion de puissance et définir une opération de rang n, notée $[O(n)]$. Ainsi nous aurions :

$[O(1)] = +$
$[O(2)] = \times$
$[O(3)] = \Uparrow^{(\dots)}$
$[O(4)] = \&$
$\dots$

Ce qui revient à définir par récurrence les opérations successives suivantes. Pour tout a, b et n pris dans l'ensemble des entiers naturels N :

$a\,[O\,(1)]\;b = a + b$

$a\,[O\,(2)]\;b = a \times b$

$\ldots$

$a\,[O(n)]\;b = a\,[O(n-1)]\;a\,[O(n-1)]\;\ldots\;a$ (b fois)

$a\,[O(n+1)]\;b = a\,[O(n)]\;a\,[O(n)]\;\ldots\;a$ (b fois)

$\ldots$

À noter au passage que la définition des puissances itérées de Knuth est similaire à notre définition d'opération de rang n. Plutôt que de toujours chercher à généraliser et à exprimer une liberté mathématique sans limite, restreignons-nous, soumettons-nous à une règle, plaçons-nous dans un cas particulier qui se révèlera bien plus général que cette série d'opérations qui finissent par ne plus offrir aucun intérêt. En effet, pour définir correctement $[O(n)]$, il faut préciser une règle de priorité de calcul (placement des parenthèses). La règle retenue est la règle non conventionnelle : écriture et lecture en sens inverse, ce qui correspond à un placement de parenthèses à partir de la fin. Exemple :

$$3 \,\&\, 4 = 3^{\left(3^{\left(3^3\right)}\right)}$$

Ainsi, pour tout entier naturel a, b et n, une fonction $f(a,b,n)$ peut être définie ainsi :

$f(a,b,n) = a\,[O(n)]\;b$

Exemple :

$f(1,1,1) = 1\;[O(1)]\;1 = 1 + 1 = 2$

$f(1,3,2) = 1\;[O(2)]\;3 = 1 \times 3 = 3$

$f(4,2,3) = 4\;[O(3)]\;2 = 4^2 = 16$

$f(3,4,4) = 3\;[O(4)]\;4 = 3 \,\&\, 4 =$ beaucoup, comme déjà vu

Pour tout couple d'entiers naturels (a,b) donné, je peux définir $f(n) = f(a,b,n)$, une fonction de n définie sur N :

$$\begin{aligned} f : N \times N \times N &\to N \\ (a,b,n) &\longmapsto f(n) \end{aligned}$$

Ainsi, $f(n)$ est définie sur l'ensemble des entiers naturels avec la relation d'ordre naturel. Ce genre de fonction peut probablement être lissée, une opération qui consiste à rendre une fonction continue sur un intervalle donné, de telle sorte qu'il n'y ait jamais « d'à-coup » le long de sa représentation graphique. Éventuellement, on peut démontrer son existence dans l'ensemble des nombres rationnels en manipulant $f(p)$ et $f(q)$ pour obtenir une définition de $f(p/q)$ et passer à la limite par une suite de Cauchy pour obtenir $f(x)$, avec p et q des entiers naturels et x un nombre réel.

Ainsi, pour tout couple (a,b), nous avons un résultat qui concorde avec $a+b$ lorsque $x=1$, $a\times b$ lorsque $x=2$ et a^b lorsque $x=3$. Que se passe-t-il lorsque $x=2/3$? Lorsque $x=2/3$, on définit une opération intermédiaire, située entre l'addition et la multiplication. On pourrait objecter que cette opération dépend de a et b. En fait, elle n'en dépend que d'une certaine manière qui reste à définir. C'est justement la confirmation que les opérateurs dépendent bien des chiffres qu'ils manipulent et que les opérateurs classiques sont une coïncidence. À noter aussi que les lois de la physique actuelle utilisent essentiellement les opérations telles que +, × et $\Uparrow^{(\cdots)}$. À ma connaissance, aucune loi physique n'intègre l'opération de tétration &. Les lois physiques sont-elles vraiment limitées aux trois premières opérations arithmétiques ? Pour le nageur que je suis, n'y aurait-il pas des lois de la nature reflétant ces opérations intermédiaires, par exemple dans la mécanique des fluides ? Aussi, qu'en est-il des nombres formés par l'inverse de la surpuissance, la *sur*-racine ? Qu'y a-t-il entre les nombres complexes, quel est ce grand vide que nous avons laissé entre eux ? Et est-ce que le nombre d'Euler « *e* », sorte d'identité de la puissance, ne pourrait pas être mieux vu de dessus, depuis les nombres formés par la *sur*-racine ? N'est-ce pas une première sur-racine toute naturelle ? Qu'en est-il aussi de l'inverse des opérations intermédiaires, entre addition et multiplication… À quelle étrange famille de nombres va-t-il donner naissance, d'autres vides ? D'autres déséquilibres ? D'autres règles pour les équilibrer sur le point de vue de l'identité mathématique ? Est-ce que π ne serait pas simplement issu d'un nombre obtenu par l'inverse d'une opération intermédiaire ? Et les nombres premiers, sorte d'identité de la multiplication, se retrouvent-ils entre addition et multiplication ? Est-ce que des super-π émergent ? Poursuivons !

Dans une logique d'économie typographique, réduisons a et b à n. Ainsi $f(a,b,n)$ se réduit à $f(n,n,n)$, ou plus simplement $f(n)$. Nous aurions ainsi :

$f(1)=1+1=2$
$f(2)=2\times 2=4$
$f(3)=3^3=27$
$f(4)=4\,\&\,4>\text{googolplex}$
…

Éventuellement, par convention, on noterait $f(0) = S\,0 = 1$. La notation précédente exprime la fonction dite d'Ackermann. Ainsi $f(n)$ est une suite d'entiers naturels particulièrement croissante : une suite de suites croissante : chaque étape définit une nouvelle suite, une nouvelle opération, celle de la énième surpuissance. En effet, je définis $[O(n+1)]$ à partir de $[O(n)]$. L'impression qui s'en dégage, c'est que chaque étape de la suite constitue la définition d'une nouvelle opération, basée sur la précédente, sur une répétition de la précédente. La définition d'une opération plus rapide encore que la précédente telle que l'ensemble des opérations peut être associée à une suite. En d'autres termes, $f(n)$ ressemble à une suite qui chercherait la suite la plus croissante possible, les termes étant successivement les suites encore plus croissantes définies à partir des suites précédentes.

La fonction $f(n)$ pose finalement le problème du plus grand nombre ; c'est-à-dire de la suite de signes typographiques qui traduirait le plus grand nombre et aussi la croissance la plus rapide ; c'est-à-dire l'explication de l'agencement de la suite de signes typographiques à mettre en place qui traduirait le plus grand nombre et la suite de suites avec la plus forte croissance. En cherchant à chaque étape la suite la plus croissante possible, elle se chercherait elle-même dans un cercle vicieux.

Quel est le critère ultime de croissance ? Existe-t-il un critère ultime de croissance ? Est-ce qu'il existe des croissances tellement grandes que je sais que je ne pourrai pas les calculer ? Est-ce que la calculabilité est le dernier critère de grandeur ? Ou bien est-ce la possibilité de définition par un algorithme ?

Course-poursuite

Il existe des nombres tellement grands qu'il est impossible de les calculer simplement à partir d'un algorithme. D'après moi, le critère ultime pour le plus grand nombre est la compréhension de sa définition : sa formulation. La formulation de sa formulation. C'est-à-dire la suite significative de symboles typographiques qui le définit. Il faut un mathématicien pour les faire exister, pour leur donner naissance en quelque sorte.

On pourrait ainsi définir le plus grand nombre comme le plus grand nombre trouvé en un temps d'écriture donné. En un nombre donné de symboles nécessaires pour le définir. Le nombre de symboles pouvant être associé à l'horizon d'une suite. Ainsi, davantage qu'un plus grand nombre, il y a une suite de plus grands nombres qui tend vers le plus grand infini. On pourrait considérer chaque symbole successif (notamment les nombres mais pas seulement) des lignes typographiques de sa définition comme une étape produite par la suite en question.

On pourrait m'objecter que ma suite est moins croissante que le double de ma suite : mais en prenant quelques caractères pour définir ce que serait le double de ma suite, vous perdez du temps ; ce n'est pas très efficace de doubler plutôt que d'utiliser le concept Ackermann. On pourrait aussi m'objecter que la suite de symboles définissant, à un niveau n donné, le plus grand nombre est dépendante de ce niveau ; de sorte que la suite à un niveau n est radicalement distincte, dans toutes ses étapes, de la suite au niveau $n+1$. Ainsi, je définirais la suite la plus croissante possible comme celle pour laquelle n tend vers l'infini.

Tout compte fait, la fonction d'Ackermann n'est-elle pas un peu répétitive pour être vraiment rapide ? On peut faire beaucoup mieux en pratiquant un peu chaque étape de sa suite. J'indique ci-dessous la pratique à un niveau donné par la mise entre crochets. Un mathématicien extralucide n'aurait pas besoin de pratiquer pour trouver l'opération qui suit. Un mathématicien normalement constitué en a besoin. Finalement, on s'aperçoit qu'à chaque nouvelle étape, à chaque nouveau concept-produit, la suite digère, interprète à nouveau les étapes précédentes ; un peu à la manière des ordinaux. Pour résumer ce dernier paragraphe, nous pourrions écrire :

ÉTAPE 0 : *succession*
Étape 0 : S
$S0=1 \rightarrow S1=2$, $SS0=2 \rightarrow SSS0=3 \rightarrow SS2=4$
…
succession de successions : *addition*

ÉTAPE 1 : *addition*
Étape 0 : $+1=S$
Étape 1 : $+n$
Multiplication, *puissance*, *surpuissance*
…
addition successivement réitérée : *Ackermann*

ÉTAPE 2 : *Ackermann*
Étape 0 : $A(0)=+1=S$
Étape 1 : $A(1)=+n$
Étape 2 : $A(n)$
Processus précédent itéré : *Ackermann*, *super-Ackermann*
…
indexation d'Ackermann : *Conway*

ÉTAPE 3 : *Conway*
Étape 0 : $C(0) = A(0) = +1 = S$
Étape 1 : $C(1) = A(1) = +n$
Étape 2 : $C(2) = A(n)$
Étape 3 : $C(n)$
…

Finalement, ici, je m'autorise à changer en cours d'écriture la liste des instructions pour autant qu'elles soient définies typographiquement, et pour autant qu'elles fassent sens pour le mathématicien.

On ne peut pas, d'après moi, envisager de suite ou de liste plus rapide, car elle va aussi vite que vous changez de notation, de grammaire, de compréhension... C'est presque une tautologie de dire qu'elle est la plus rapide envisageable, car nous sommes incapables de « sauter les étapes de son raisonnement », les étapes de cette suite étant par définition les étapes de sa compréhension, de sa définition.

Pour définir proprement cette suite « U » par récurrence, il faudrait imaginer un langage formel qui puisse créer et identifier de lui-même des concepts nouveaux qu'il intégrerait par la suite. Un langage formel qui puisse évoluer ; un genre d'intelligence artificielle ou naturelle de mathématicien. Ou un langage formel qui se mordrait la queue puisqu'il envisagerait dès sa naissance (lorsqu'il est dépouillé d'amélioration) la possibilité de se manipuler lui-même par des concepts qu'il ne connaîtrait pas encore. Un peu comme si les atomes (ou plutôt la matière-énergie) étaient un langage formel qui donnerait libre cours à l'évolution de faire émerger un nouveau concept, de type « formes réplicables » telles que l'ARN ou l'ADN, et qui réutiliserait ce même concept pour les traduire eux-mêmes (la molécule d'ADN par exemple produit des molécules capables de la manipuler) pour finalement arriver à des organismes vivants capables de raisonner et de se poser la question du langage formel...

Bref, pour trouver la méthode récursive qui donnerait les termes de « U », il faut un langage formel compliqué qui se mord la queue. Un langage paradoxal qui teste les limites de la raison. C'est peut-être impossible. En ce qui me concerne, je crois que l'émergence d'un concept est aussi raisonnable que déraisonnable : il faut répéter et tordre dans tous les sens les concepts précédents pour les analyser, les essouffler avant de pouvoir lâcher prise, aller vers des raccourcis et des similitudes. Le problème, c'est que cela prend un certain temps. Autrement dit (en termes algorithmiques), un certain nombre d'étapes.

Récursion

Si vous regardez attentivement chaque «ÉTAPE», vous remarquez que chacune intègre la précédente à sa façon, réinterprète son infinité n comme une simple étape de sa propre suite. Elle équilibre l'infinité cardinale de la suite précédente en la notant d'un simple entier ordinal. On peut le voir plus simplement dans le tableau[1] suivant:

Égalité	S	$+$	$\times$	$\uparrow^{(\dots)}$	$\&$	Ackermann
1	$S0$	$1+0$	1×0	1^0	$1 \& 0$	$A(1,0)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$A(2,0)$
n	$S\dots S0$	$n+0$	$n\times 1$	n^1	$n \& 1$	$A(n,0)$
$\dots$		$\dots$				$A(1,1)$
$2\times n$		$n+n$	$2\times n$			$A(n,1)$
$\dots$			$\dots$			$A(1,2)$
n^2			$n\times n$	n^2		$A(n,2)$
$\dots$				$\dots$		$A(1,3)$
n^n				n^n	$n \& 2$	$A(n,3)$
$\dots$					$\dots$	$A(1,4)$
$n \& n$					$n \& n$	$A(n,4)$
$\dots$						$\dots$
$C(n,n,1)$						$A(n,n)$
Ensemble	$\mathcal{N}$	$\mathcal{Z}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{C}^*$	$\mathcal{D}^*$	?
	Cardinal	-	-	-	-	Ordinal

C* et D* relèvent d'une notation personnelle; ils comprennent une partie des complexes, mais pas tous les réels. Peut-être que D* ou bien un suivant, ou bien la limite de la suite N, Z, Q, etc. constituerait un ordinal intermédiaire, entre N et R? Égal à R? Au-delà de R? C'est en tous cas une proposition qui reste ouverte.

La notation d'Ackermann $A(i, j)$ où i indique les nombres et j les opérations embrasse en elle-même l'ensemble des opérations et des nombres précédents. C'est ce que je note par les points de suspension. Ces points de suspension étaient manquants dans les opérations de multiplication, puissance et surpuissance: c'est en cela qu'elles n'auraient pas de place dans la suite la plus croissante possible. Cela est sans doute lié à leur pauvreté de simple réplication du concept d'itération.

Il est difficile de ne pas penser à cette formule biologique simplificatrice: l'ontogenèse résume la phylogenèse. L'opération la plus évoluée s'appuie sur les opérations précédentes, en les interprétant. En fait, les mathématiques nous parlent d'elles-mêmes: mathématiques métamathématiques.

Sans addition de $n\,(n+0)$, je reste n. Sans multiplier n je reste n, car sans rien faire à n je reste à peu près n. En fait, je peux aussi lui faire faire un tour complet en le multipliant une fois sur lui-même. L'égalité mathématique considère qu'il s'agira du même *n*. Pour moi, pas tout à fait. Uniquement sur la toile mathématique. De sorte que 1×0 est différent de 0 même s'il est égal mathématiquement. On pourrait élargir un peu notre point de vue en pratiquant une sorte d'algèbre non arithmétique, équipée de $1 \times 0 = 1$ (avec quelques ajustements pour garantir la cohérence, peut-être l'idée d'une commutativité dépendante du contexte typographique).

Métamathématiques

Langage

Nous sommes un peu après la crise économique mondiale de 1929 ; un groupe de philosophes et de scientifiques se réunit occasionnellement sous le nom de Cercle de Vienne. Leurs discussions sont fortement teintées de positivisme logique. Voici en quelques mots des extraits romancés de leurs discussions.

Pourquoi ce mal-être au fond de nous, cet inconfort qui imprègne notre existence ? Réponse : parce qu'il y a une angoisse induite par des questions qui n'ont pas de réponses. Pourquoi y a-t-il des questions sans réponses ? Réponse : parce que les questions ne sont pas rigoureusement formulées. Pourquoi finalement les questions ne sont-elles pas claires ? Réponse : parce que les mots utilisés pour les former sont équivoques. Existerait-il un langage qui ne serait pas teinté d'émotions, de sonorités faisant écho à notre vécu sur un fond de non-dits, nous permettant ainsi de dépasser ce mal-être ? Un langage purement logique qui permettrait d'être à la fois complet et cohérent ? Parmi eux, un jeune philosophe et logicien, Ludwig Wittgenstein. Il paraît que le langage de Wittgenstein est ultime : il ne reste plus qu'à comprendre ce qu'il veut dire ; regroupons-nous donc à Vienne pour en discuter.

L'histoire nous apprendra qu'il y a deux Wittgenstein : le premier aurait réussi à définir les limites du langage. Comme il le résumait lui-même, tout ce qui peut être proprement dit peut être dit clairement, et sur ce dont on ne peut pas parler, il faut le taire. En gros, ce qui peut être dit a un sens, ce qui ne peut pas l'être n'en aurait pas. Et il convient de distinguer l'insensé de l'absurde. Et puis il y a le second Wittgenstein, celui qui a passé la seconde moitié de sa vie à penser qu'il s'était trompé durant la première. Je ne suis pas certain que le langage ait des limites, mais mon masochisme, lui, en a : je n'ai pas trouvé très économique de passer du temps à comprendre quelque chose d'apparemment compliqué, au sujet duquel l'auteur lui-même affirme qu'il s'est finalement trompé. Mais j'imagine qu'il peut exister plus vicieux que moi, avec un intérêt pédagogique pour ce qui est inquiétant. Enfin… Je ne suis certainement pas impartial et suffisamment patient pour décortiquer Wittgenstein, car je ne pardonne pas la méchanceté que je prête aux wittgensteiniens.

Le langage en question, c'est celui de la logique. La logique nous parlerait donc de nous et pourrait offrir son point de vue. Comment faire vibrer la logique ?

Avec l'arithmétique, Gödel prend du recul et se place dans un contexte plus général : il parle au nom de tout système logique suffisamment puissant pour décrire l'arithmétique. Il résout le déséquilibre logique avec son interprétation de l'arithmétique. Il laisse les choses libres de se révéler entre elles.

Théorie

Kurt Gödel, habillé en fille dans sa tendre enfance, paranoïaque par la suite, meurt de faim en pensant qu'on voulait l'empoisonner. Entre-temps il démontre arithmétiquement que l'arithmétique peut exprimer davantage d'assertions qu'elle ne peut en démontrer. Autrement dit, que tout système logique comprenant l'arithmétique est capable de poser certaines questions auxquelles il est incapable de répondre. Que les mathématiques rejoignent la condition humaine au sens du paragraphe précédent.

La démonstration elle-même est aussi intéressante que le résultat. C'est une démonstration constructive : elle produit une égalité qui parle d'elle-même. On évoque souvent à son propos le paradoxe du menteur, une phrase du type « je suis un menteur », mais c'est un peu réducteur. Je préfère parler de la construction atomique d'une molécule d'ADN. Gödel construit une cellule mathématique capable de se lire de deux manières et dont les deux lectures s'interpénètrent. L'ADN est lu comme constructeur d'une machine à décrypter l'ADN d'abord, puis la machine décrypte effectivement l'ADN pour fournir à la fois l'œuf et la poule. Éventuellement, on pourrait dire qu'il se tisse une toile sur laquelle se dépose, en plus du moustique, le chemin du moustique, son histoire. L'égalité se fait à deux niveaux. Sa démonstration peut être découpée selon ces deux temps.

Dans un premier temps, il construit un code. Ce code associe à des puissances de nombres premiers d'autres nombres ou même des opérations. La lecture codée respecte la lecture classique. De sorte qu'une équation issue de son système de codage peut être lue directement, classiquement, mais aussi indirectement, selon le code qu'il a construit. Ainsi on peut lire deux choses tout à fait différentes ; deux niveaux d'interprétation sont possibles. On peut voir le paquet d'atomes que je suis ou bien l'homme. On peut lire le paragraphe d'un livre éclairé par un autre, dans un autre. Dans un second temps, il construit une équation dont les niveaux d'interprétation parlent l'un de l'autre. La technique est belle ; elle utilise entre autres l'argument de la diagonale. Au final, sa démonstration est très courte malgré le nombre incroyable de symboles auxquels elle se réfère – et qu'elle construit d'une certaine manière. Un modèle d'économie, d'esthétique.

Gödel, en développant son système de codage et en liant judicieusement deux interprétations d'une même équation, invente la métamathématique. Des mathématiques qui parlent d'elles-mêmes et vont révéler un monde extérieur à elles-mêmes. L'émergence d'une rose est possible, même dans cette forteresse de glace des *Principia Mathematica*. L'arithmétique nous parle d'elle-même et se révèle, ainsi, en nous révélant ses limites et celles du mathématicien.

Logique

Le jeu de la vie, c'est une histoire qui se déroule sur une grande grille à deux dimensions, dont les cases sont occupées par une cellule soit vivante, soit morte. Cette histoire a été inventée par Conway (l'auteur du super-Ackermann). Les règles sont les suivantes :

> *Vie* : une cellule morte possédant exactement trois voisines vivantes devient vivante (elle naît).
> *Mort* : une cellule vivante possédant deux ou trois voisines vivantes le reste, sinon elle meurt.
> La *liberté*, c'est la configuration à l'origine, la répartition initiale des cellules mortes et vivantes.

Il n'y a pas besoin de joueur ; ils apparaîtront peut-être tout seuls, plus tard dans le jeu. Il faut juste du temps et de l'espace, un grand goban et le temps d'y jouer et rejouer pour que des configurations aléatoires donnent finalement naissance à des structures autoréplicantes. Sans aller jusque-là, on peut déjà observer avec des configurations initiales très simples des feux d'artifice. Proposez un « U » formé de 7 cellules. Attendez 110 coups. Vous obtiendrez une figure de clown. Et en creusant un peu plus ou un peu moins, d'autres configurations comme les grenouilles laisseront la place à des canons lanceurs de planeurs, à des vaisseaux lanceurs de canons de planeurs… ou bien à un jardin d'Eden.

Les règles sont incroyablement simples devant la débauche de possibles. En fait, on montre que les possibles en question correspondent à toutes les possibilités d'un algorithme. On peut combiner les structures que nous rencontrons sur ce jeu au fur et à mesure de nos observations pour faire apparaître des règles logiques de type *et*, *ou*, *non* et *si… alors*. C'est-à-dire des structures similaires à des neurones qui réagissent si deux signaux simultanés sont envoyés (par exemple des planeurs). Ainsi, certaines structures émettent un planeur si elles en reçoivent un depuis la gauche ou depuis la droite ; d'autres structures encore émettent des planeurs tant qu'elles n'en reçoivent pas. Le jeu de la vie ressemble à une machine de Turing universelle capable de produire tout ce que les algorithmes peuvent produire.

D'ailleurs, la vie ne sait pas ce qu'elle peut produire ; et nous non plus du reste. Nous savons juste que des choses imprévues peuvent arriver. Que l'émergence est possible puisqu'elle est arrivée.

Conway a étudié le subtil équilibre des règles de vie et de mort : les conditions de l'émergence de structures sur une grille à deux dimensions. Si la vie est trop avantagée, par exemple si les cellules naissent aussi pour quatre cellules environnantes, c'est le chaos ; si la mort est trop avantagée, par exemple si une cellule ne survit qu'avec deux voisines, c'est le désert. L'une ne doit pas prendre le pas sur l'autre pour que des structures intéressantes, complexes émergent. L'émergence est située sur le fil du rasoir de la vie et de la mort. Et ce que nous appelons vie est en fait une frontière délicate entre les deux.

La beauté du jeu de la vie vient de la simplicité de ses règles. Les deux critères pour les règles du jeu sont : économie et équilibre. C'est ainsi que de la quantité naîtra la qualité. De l'espace et du temps émergeront la nouveauté, les possibles. Interprétations possibles, successives. Entre incohérence et incomplétude, des possibles qui s'engendreront les uns les autres et qui permettront la signification en quatre temps. Quels nombres pour une émergence ? Combien d'atomes pour faire émerger la vie, combien de connexions possibles de neurones pour faire émerger la conscience, de symboles dans la formule de Gödel ? Peut-on représenter le visage du métamathématicien ?

Représentation

Il est possible de se représenter différentes formes d'égalités-identités selon le tableau suivant :

Conformité	Symétrie	Transformation	Déformation
point	ponctuelle	rotation	homothétie
forme	axiale	translation	projection
chiffre	sommer	multiplier	exponentialiser

D'autres termes pourraient être associés à ce tableau, comme identité, associativité, réflexivité, commutativité, égalités variées, distributivité, transitivité, etc. Mais on peut déjà noter que chaque terme a deux faces : par exemple, la projection peut être une injection ou une surjection, c'est-à-dire une réduction ou une augmentation de l'information (hystérésis). Il y a également des liens verticaux et matriciels : une translation peut se construire à partir de rotations, de même qu'une rotation est une somme de symétries axiales. Et la quatrième ligne n'est pas un oubli : par exemple la multiplication transforme, compose en facteurs premiers ; l'exponentielle ne supprime pas d'information, elle en ajoute presque et fait d'un rond et d'un rectangle un cylindre. C'est l'équivalent d'une projection « surjective ». À l'inverse, le logarithme projette de manière injective un cylindre en rectangle et rond, comme il assimile les rapports à des différences ; il n'expose pas, il analyse. L'exponentielle permet le calcul et l'identité de résultat de par sa non-commutativité. C'est pareil ; ou plutôt une interprétation du pareil. L'égalité a donc quelque chose de l'opération.

L'égalité vibre au son des sens de lecture et d'écriture. Par égalité j'entends plusieurs sons, comme celui de la commutativité, de la symétrie… jusqu'à la théorie de la représentation… jusqu'à l'interprétation et la rationalité du mathématicien. Les mathématiques vues par les mathématiciens, c'est un déséquilibre léger, une relation fertile entre une égalité typographique sur une feuille et un homme qui la regarde : l'un et l'autre s'observent. Le mathématicien est un invité qui dispose de son libre arbitre. Mon libre arbitre, c'est mon choix de placement des parenthèses. Les possibilités de placement sont nombreuses, infinies. Comment choisir ? Au nom de quoi juger un placement vis-à-vis d'un autre ?

La compréhension, la rationalité de mon cerveau automate ne peut pas tout. Il peut seulement m'éviter de dépenser du temps sur des questions qui peuvent être résolues logiquement. Il me permet de me concentrer sur certaines questions, celles où aucune loi logique ne permettra de savoir ce qu'il faut faire. Il faut donc sortir des mathématiques pour trouver la réponse, aller dans le monde métamathématique pour donner une signification. Contempler de dehors pour se situer, regarder ce qui semble le plus immuable et s'y soumettre tout en doutant positivement, constructivement. Et remarquer que certaines règles sont pourtant, malgré tout, significatives. Celles qui permettent de passer de possibilités infinies dénombrables, mesurables, à d'autres possibilités indéchiffrables.

C'est un peu comme si le mathématicien devenait un être aimant ; l'amour démultiplie les possibles et les sentiments amoureux ne se comptent pas. Une lecture atomique est possible, mais elle n'a pas de sens sans la lecture sentimentale, vivante. Les deux niveaux d'interprétation ont une réalité : les deux sont réalité ; à bien y réfléchir, les deux s'engendrent suivant le point de vue que l'on prend : l'atome précède la vie du point de vue du sujet, la vie précède l'atome du point de vue de l'objet ; les sens du temps sont simplement inversés. Il faut donc voir les deux ensemble pour n'en rater aucun. Il faut donc être « matière » et « vie ». Il faut être rationalité et amour. Pour faire des mathématiques, il faut les faire avec amour, en se trompant, parfois.

Le royaume du mathématicien n'appartient pas au monde mathématique.

Note

[1] En construisant ce tableau, je me suis aperçu que $1 \times 0 = 1$ tandis que $0 \times 1 = 0$ resterait valable. Je ne crois pas que la multiplication devrait être commutative en 0. Seulement pour les entiers strictement positifs. Je ne pense d'ailleurs pas que cela créerait de contradiction si l'on en tenait compte.